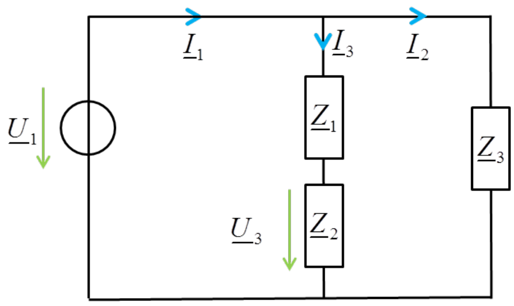
Sciences et technologies de l'électricité 2025 – Série 7 SOLUTIONS

Exercice 1



Dans le circuit suivant nous avons :
$u_1(t) = 2\sqrt{2}\cos(6.28 \cdot 10^5 t)$ V; $\underline{Z_1} = 3 \cdot 10^3\ \Omega$; $\underline{Z_2} = j12.4 \cdot 10^2\ \Omega$; $\underline{Z_3} = -j2500\ \Omega$

1) Quel type de composant correspond aux impédances $\underline{Z_1}, \underline{Z_2}, \underline{Z_3}$? (sont-ils des résistances, condensateurs ou inductances)?

On remarque que $\omega = 6.28 \cdot 10^5$ rad/s, et que nous pouvons associé $u_1(t)$ à un phaseur efficace $\underline{U_1} = 2$ (phase de la tension est nulle)

L'élément d'impédance $\underline{Z_1}$ est une résistance car purement réelle. Elle a une valeur $R = 3\ \mathrm{k\Omega}$

L'élément d'impédance $\underline{Z_2}$ est une bobine car l'impédance est un imaginaire pur avec une phase de 90° (i.e positif)

L'élément d'impédance $\underline{Z_3}$ est un condensateur car l'impédance est un imaginaire pur avec une phase de -90° (i.e négatif)

2) Calculez les valeurs correspondantes (R, L ou C) des trois éléments.

$R_1 = 3\ \mathrm{k\Omega}$

$$L_2 = \frac{|\underline{Z_2}|}{\omega} = \frac{(12.4 \cdot 10^2)}{(6.28 \cdot 10^5\ )} = 1.97\ \mathrm{mH}$$

$$C_3 = \frac{1}{\omega|\underline{Z_3}|} = \frac{1}{(6.28 \cdot 10^5\ )(2500)} = 636.9\ \mathrm{pF}$$

3) Calculez le courant $\underline{I_2}$.

Soit $\underline{U_2}$ la tension aux bornes de l'élément $\underline{Z_3}$: $\underline{U_2} = \underline{U_1} = \underline{Z_3}\underline{I_2}$. Donc :

$$\underline{I_2} = \frac{\underline{U_1}}{\underline{Z_3}} = \frac{2}{-j2500} = \frac{2}{2500}j = (0.8 \cdot 10^{-3})j$$

$\underline{I_2} = 0.8\exp(j90°)$ mA

4) Calculez le courant $\underline{I_3}$.

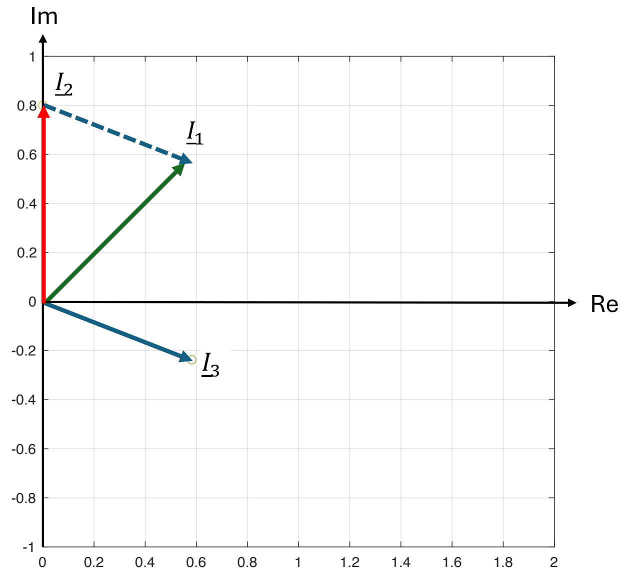
De la même façon :

$$\underline{I_3} = \frac{\underline{U_1}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2}} = \frac{2}{3 \cdot 10^3 + j12.4 \cdot 10^2} = \frac{2}{3246.2\exp(22.5°j)} = \frac{2}{3246.2}\exp(-22.5°j)$$

$\underline{I_3} = 0.62\exp(-22.5°j)$ mA

5) Représentez $\underline{I_2}$ et $\underline{I_3}$ dans un diagramme de Fresnel. En déduire graphiquement la valeur efficace du courant délivré $\underline{I_1}$ et estimez son déphasage par rapport à la source de tension.

Par la loi des nœuds on a que $\underline{I_1} = \underline{I_3} + \underline{I_2}$. Donc nous pouvons faire l'addition sur le diagramme de Fresnel. On obtient visuellement que $|\underline{I_1}| = I_1 \approx 0.8$ et que la phase est de 45°



Exercice 2

Votre maison est équipée d'un ballon d'eau chaude sanitaire de 300 L, élevant la température de l'eau de 15°C à 65°C.

La masse volumique de l'eau est de 1 kg/L, et la chaleur massique de l'eau est C = 4.19 kJ/(kg.K)

1) Etant donné que la chaleur massique de l'eau est la quantité d'énergie à apporter par échange thermique pour élever *d'un degré* (°C ou K) la température *d'un kg* d'eau, calculez l'énergie thermique Q acquise par ces 300 L d'eau pour la chauffer de 15°C à 65°C. Exprimez-la en kWh.

$$Q = (C \cdot 300 \cdot 50) = 62.850 \cdot 10^3 \text{ kJ}$$

$$Q = \frac{62.850 \cdot 10^3}{3.6}$$

Q=17.458 kWh

2) Votre élément chauffant est sous une tension de 230 V et génère 1.5 kW. Quelle est la valeur de la résistance électrique de l'élément chauffant en supposant que celui-ci est purement résistif ?

$$P = \frac{U^2}{R}$$

$$R = \frac{U^2}{P}$$

$$R = 35.267\ \Omega$$

3) Combien de temps faut-il à votre élément chauffant pour chauffer l'eau du ballon ?

$$Q = P \cdot \Delta t$$

$$\Delta t = \frac{Q}{P}$$

$$\Delta t = 11.639\ \text{h}$$

4) Pour des soucis économiques de l'utilisateur, la durée de chauffe de l'eau du ballon doit être limitée à la durée des heures creuses soit 6 heures. Quelle devrait être la valeur de la résistance pour que la chauffe du ballon ne dure que 6 heures ?

$$Q = P_1 \cdot \Delta t_1$$

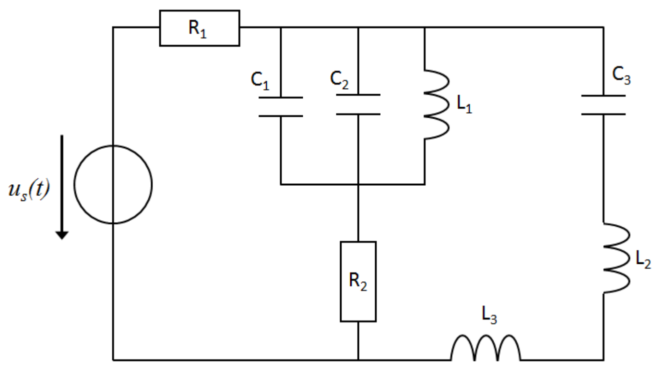
$$P_1 = \frac{Q}{\Delta t_1} = 2.91\ \text{kW}$$

$$\frac{U^2}{R_1} = 2.91 \cdot 10^3$$

$$R_1 = \frac{230^2}{2.91 \cdot 10^3}$$

$$R_1 = 18.179\ \Omega$$

Exercice 3



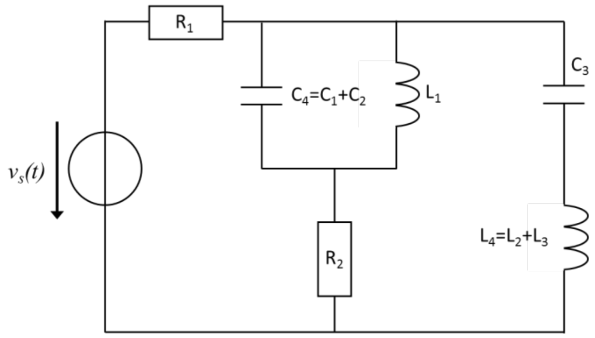
$R_1 = 4\ \Omega$
$R_2 = 4\ \Omega$
$C_1 = 100\ \mu F$
$C_2 = 100\ \mu F$
$C_3 = 500\ \mu F$
$L_1 = 20\ mH$
$L_2 = 15\ mH$
$L_3 = 15\ mH$
$u_s(t) = 24 \cos(20000t + 45°)$

1) Déterminez l'impédance équivalente vue pas la source de tension. Exprimez la sous forme algébrique et sous forme phaseur. Le circuit se comporte-t-il de manière inductive ou capacitive ? Justifiez votre réponse.

Aide: En tant qu'ingénieur, vous pouvez estimer *qu'une valeur peut être négligée* par rapport à une autre si elle est plus petite par au moins 2 ordres de grandeur. Donc simplifiez vos valeurs – l'idée n'est pas de vous faire faire des pages de calculs !

Remarquons que ω = 2 10^4 rad/s.

Nous commençons par simplifier les C en // et L en série :



Nous pouvons écrire les inductances de ce circuit puis faire la simplification dans le domaine complexe associé :

R_1 = R_2 = 4 Ω
$C_4 = -j/\omega(200 \cdot 10^{-6}) = -0.25j$
$C_3 = -j/\omega(500 \cdot 10^{-6}) = -0.1j$
$L_1 = j\omega(20 \cdot 10^{-3}) = 400j$
$L_4 = j\omega(30 \cdot 10^{-3}) = 600j$

- C_3 série L_4 : $\underline{Z_1}$ = -0.1j + 600 j ≈ 600j

- $C_4// L_1$: $\underline{Z_2} = \frac{-0.25j\times400j}{399.75j} = \frac{100}{399.75\ j} \approx -0.25j$

- Z_2 série R_2 : $\underline{Z_3} = 4 - 0.25j$

- $\underline{Z_3}$ // $\underline{Z_1}$: $\underline{Z_4} = \frac{(4-0.25j)600j}{4+599.75j} \approx \frac{2400j+150}{4+599.75j} = \frac{(2400j+150)(4-599.75j)}{359716} \approx 4 - 0.22j$

- Pour finir $\underline{Z_{eq}} = \underline{Z_4} + R_1 \approx 8 - 0.22j$

Sous forme phaseur : $\underline{Z_{eq}} \approx 8\exp\,(-1.58°j)$

Le circuit se comporte de **manière capacitive** car la réactance est négative

Note : il est aussi acceptable, étant donné l'énoncé, d'arrondir $4 + 599.75j \approx 600j$ (si on considère la partie réelle négligeable). Dans ce cas :

- $\underline{Z_3}$ // $\underline{Z_1}$: $\underline{Z_4} = \frac{(4-0.25j)600j}{4+599.75j} \approx \frac{(4-0.25j)600j}{600j} \approx 4 - 0.25j$

Pour finir $\underline{Z_{eq}} = \underline{Z_4} + R_1 \approx 8 - 0.25j$ et $\underline{Z_{eq}} \approx 8\exp\,(-1.79°j)$

-

2) Exprimer la tension $u_S(t)$ sous forme phaseur crête.

$\underline{\hat{U}_S} = 24\,\exp(45°j)$

3) Calculer le courant débité par la source de tension. L'exprimer sous forme algébrique et sous forme phaseur crête. Quel est le déphasage entre $u_S(t)$ et le courant qu'elle débite ?

Nous avons par la loi d'Ohm : $\underline{\hat{U}_S} = \underline{Z_{eq}}\underline{\hat{I}}$

Donc $\underline{\hat{I}} = \frac{\underline{\hat{U}_S}}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{24\,\exp(45°j)}{8\exp\,(-1.58°j)} = 3\,\exp(46.58°j) = 2.06 + 2.18j$ A

De plus le déphasage entre la tension et le courant est tout simplement la phase de l'impédance équivalente, donc -1.58°.

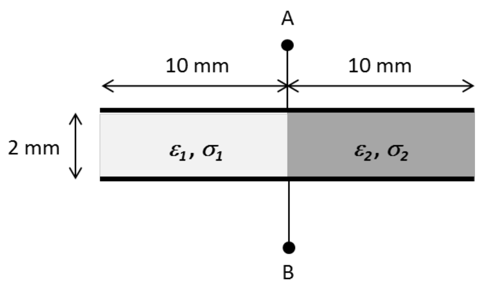
4) Quelles sont les puissances complexe, active et réactive délivrées par la source ?

$\underline{S}$=$\underline{UI}^* = \frac{1}{2}(24\,\exp(45°j))(3\,\exp(-46.85°j)) = 36\,\exp(-1.58°j) = 35.99 - 0.99j$

$$P = 35.99 \text{ W}$$
$$Q = -0.99 \text{ var}$$

Exercice 4

Considérez le dipôle ci-dessous. Il se compose de deux électrodes carrées de dimensions 20 mm x 20 mm. Elles sont séparées de 2 mm. L'espace entre les électrodes est rempli de deux blocs de diélectriques différents (dimensions de chacun 20 mm x 10 mm x 2 mm).



Les diélectriques ont les permittivités suivantes : $\varepsilon_1 = 500 \text{ pF/m}$, $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$. Ces diélectriques offrent également une résistance et ont donc également une conductivité donnée par $\sigma_1 = 2\ \mu\text{S/m}$ et $\sigma_2 = 4\sigma_1$.
Ce condensateur réel est modélisé par un *condensateur idéal en parallèle avec une résistance*.

1) Ce dipôle est modélisé par deux condensateurs réels. Dessinez le schéma équivalent.

Les deux condensateurs sont en parallèle. Chacun est caractérisé par sa capacité et résistance (C_1, R_1) et (C_2, R_2).

2) Calculez les valeurs de capacité C_1 et C_2 des deux condensateurs réels ainsi que les valeurs des résistances R_1 et R_2 des deux condensateurs réels.

Nous avons :

$$C_1 = \frac{\varepsilon_1 A}{\delta} = \frac{500\left(10\cdot10^{-3}\right)\left(20\cdot10^{-3}\right)}{\left(2\cdot10^{-3}\right)} = 50 \text{ pF}$$
$$C_2 = 2C_1 = 100 \text{ pF}$$

Et

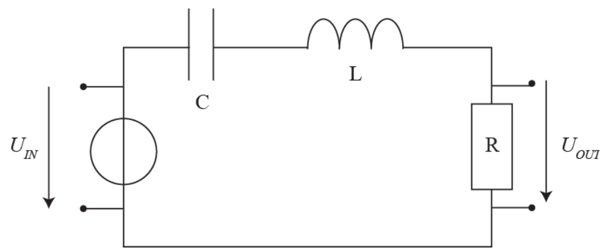
$$R_1 = \frac{l}{\sigma_1 S} = \frac{\left(2\cdot10^{-3}\right)}{\left(2\cdot10^{-6}\right)\left(10\cdot10^{-3}\right)\left(20\cdot10^{-3}\right)} = 5 \text{ M}\Omega$$
$$R_2 = \frac{1}{4}R_1 = 1.25 \text{ M}\Omega$$

3) Simplifiez le modèle pour n'avoir qu'un seul condensateur C_{eq} et une seule résistance R_{eq}. (Calculez les valeurs de C_{eq} et R_{eq}). Dessinez le schéma final.

L'agencement est de 2 condensateurs idéaux C_1 et C_2 en parallèle, également en parallèle avec 2 résistances R_1 et R_2.

Nous simplifions à un seul condensateur : $C_{eq} = C_1 + C_2 = 150 \text{ pF}$ et une résistance $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1 \text{ M}\Omega$ en parallèle.

Exercice 5



Considérez le circuit ci-contre, un filtre passe bande *RLC* série. Le condensateur a une capacité de 1 µF. Nous devons choisir les valeurs de R et de L pour que ce filtre puisse sélectionner les fréquences comprises entre les deux fréquences de coupure de 1 kHz et 10 kHz. Nous avons étudié ce filtre en classe et allons maintenant voir 2 autres méthodes.

1) Exprimez la fonction de transfert de ce filtre $\underline{H}(\omega)$ sous la forme $\underline{H}(\omega) = 1/(a + jb)$ puis l'amplitude en fonction de la fréquence $\left|\underline{H}(\omega)\right|$

$$\underline{U}_{out} = \frac{R}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C + R}\underline{U}_{in}$$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{R}{R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}}$$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)}$$

$$\left|\underline{H}(\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)^2}}$$

2) Exprimez la pulsation de résonance ω_0 (rappel : par définition la fonction de transfert est purement réelle à ω_0) en fonction des éléments du circuit.

Pour $\underline{H}(\omega)$ purement réelle, alors $\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC} = 0$

On trouve $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et on en déduit que $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ car la pulsation est positive.

3) Etant donné que $\omega_0 = \sqrt{\omega_{c1}\omega_{c2}}$, trouvez la valeur nécessaire de L.

Application numérique comme nous connaissons les valeurs des 2 pulsations de coupure :

$$\omega_0 = 2\pi\sqrt{(10^3)(10 \cdot 10^3)} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

On obtient $L = 2.53 \text{ mH}$.

4) $\left|\underline{H}(\omega)\right|$ est au maximum à la fréquence ω_0, tel que $\left|\underline{H}(\omega_0)\right| = \left|\underline{H_{max}}\right| = 1$. Exprimez les pulsations de coupure ω_{c1} et ω_{c2} en fonction des éléments du circuit. Remarquez que lorsque vous effectuez les calculs vous trouvez 4 fréquences, mais seulement 2 ont une signification physique.

$$\left|\underline{H}(\omega_c)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)^2 = 1$$

$$\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC} = \pm 1$$

A partir de l'équation quadratique on trouve les racines :

$$\omega_c = \frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}$$

$$\omega_c = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}$$

Les seules 2 solutions qui ont une signification physique sont :

$$\omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}$$

$$\omega_{c2} = \frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \frac{4}{LC}}$$

5) Exprimez la largeur de bande $\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1}$ en fonction de R et L. En déduire la valeur nécessaire de *R*.

En utilisant les expressions obtenues pour les pulsations de coupure on a que

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{R}{L}$$

Application numérique : $\beta = 2\pi\big((10 \cdot 10^3) - (10^3)\big)$. Donc $R = 143.07\ \Omega$

<u>Autre méthode et Diagramme de Bode avec système du 2eme ordre (cas sur amorti)</u>

6) Montrez que vous pouvez ré-écrire la fonction de transfert de ce filtre sous la forme

$$\underline{H}(\omega) = \frac{Kj\omega}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}$$

En déduire la pulsation de résonance ω_0 (qui doit être la même que trouvée en partie 2 !). Puis en déduire ξ, qui est appelé facteur d'amortissement, et K

On manipule la fonction de transfert :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{R}{R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}} = \frac{j\omega R}{j\omega R + (j\omega)^2 L + \frac{1}{C}}$$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC}$$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + \frac{RC}{\sqrt{LC}}\sqrt{LC} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2}}$$

On trouve que $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ et que $2\xi = \frac{RC}{\sqrt{LC}}$, donc que $\xi = \frac{1}{2} R\sqrt{\frac{C}{L}}$

7) Nous sommes dans le cas $\xi > 1$, (système sur-amorti), les racines du module du dénominateur seront telles que la fonction de transfert s'écrit :

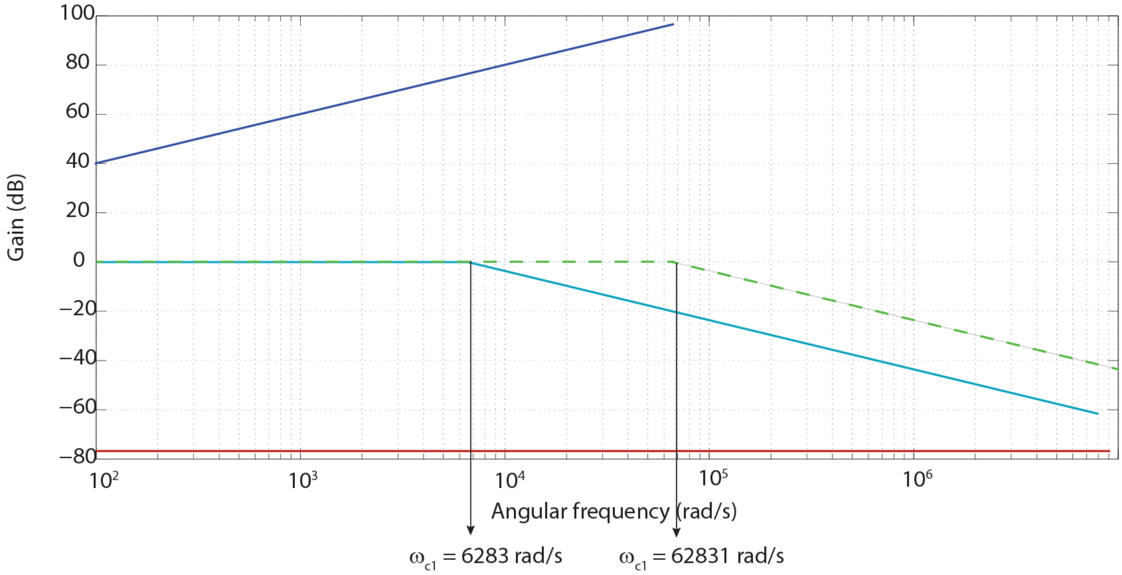
$$\underline{H}(\omega) = \frac{Kj\omega}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{c1}}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{c2}}\right)}$$

Tracez le diagramme de Bode du gain en utilisant les valeurs de la partie 1.

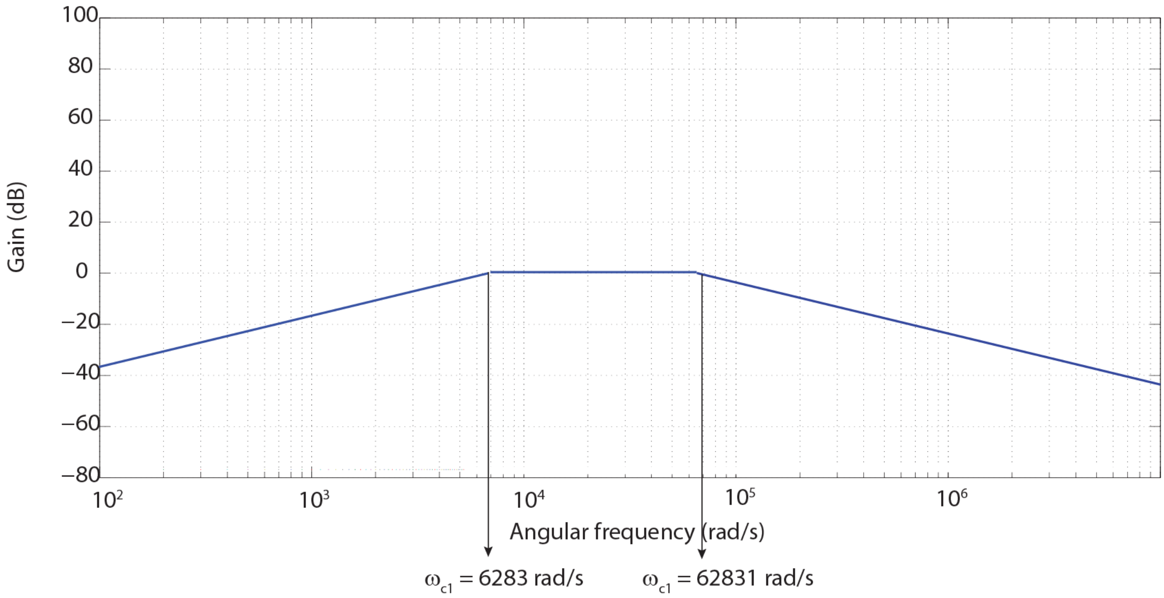
Le diagramme de Bode a 4 composantes :

- La constante $K = RC$ qui donne un Gain de : $G = 20\log_{10}(RC) = -76.9\ \mathrm{dB}$
- La composante $j\omega$, pente de 20/dB par décade passant par ω =1
- Les 2 composantes $1/\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{c1}}\right)$

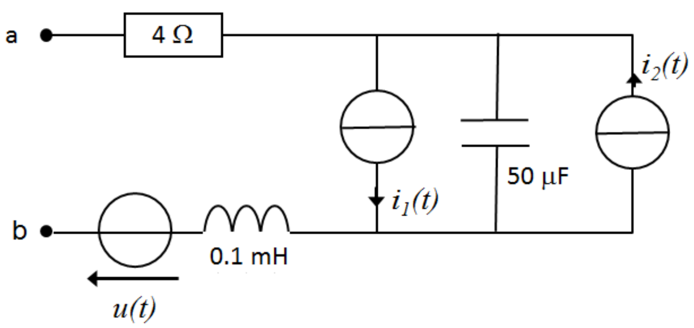
Les 4 sont représentés sur le graphe suivant montrant le gain en fonction de la fréquence angulaire (les 2 fréquences de coupures sont indiquées par des flèches)



En additionnant les 4 composantes on obtient bien un filtre passe bande :



Exercice 6



Considérez le circuit ci-dessus. Nous avons $u(t) = 4\cos(20000t + 90°)$ V , $i_1(t) = 10\cos(20000t)$ A, et $i_2(t) = 6\cos(20000t)$ A . Nous cherchons l'équivalent de Norton de ce circuit vu des bornes a et b.

1) Exprimez les impédances des éléments du circuit puis calculez l'impédance interne $\underline{Z}_0$. Exprimez $u(t)$ sous forme phaseur crête.

$\underline{Z_R} = 4\ \Omega$, $\underline{Z_L} = j\omega L = 2j\ \Omega$, $\underline{Z_C} = -\frac{j}{\omega C} = -j\ \Omega$

Pour l'impédance interne, tous les éléments sont en série : $\underline{Z_{eq}} = 4 + 2j - j = 4 + j\ \Omega$
Ou $\underline{Z_{eq}} = 4.123\exp(14.04°j)$

$\underline{\widehat{U}} = 4\exp(90°j)$

2) Calculez la tension circuit ouvert entre les bornes a et b (aide : calculez la tension aux bornes du condensateur et remarquez que certains éléments ne sont pas parcouru par du courant). Exprimez la sous forme phaseur crête.

Loi des nœuds : courant traversant le condensateur est deb $i_3 = i_2 - i_1 = -4\cos(20000t)$ A

Sous la forme phaseur : $\underline{\widehat{I_3}} = -4$. Donc la tension aux bornes du condensateur est $\underline{\widehat{U_C}} = \underline{\widehat{I_3}}\ \underline{Z_C} = 4j = 4\exp(90°j)$

La tension circuit ouvert est donnée par : $\underline{\widehat{U_0}} = \underline{\widehat{U_C}} + \underline{\widehat{U}} = 8\exp(90°j)$ car il n'y a pas de tension ni aux bornes de la résistance ni aux bornes de la bobine (circuit ouvert donc pas de courant)

3) En déduire le courant de court-circuit $\underline{I_{cc}}$. Exprimez le sous la forme phaseur crête puis réel instantané ($i_{cc}(t)$). Dessinez l'équivalent de Norton.

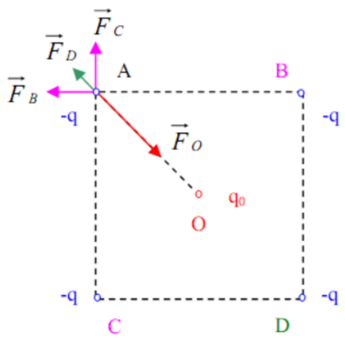
Le courant court-circuit est donné par : $\underline{\widehat{I_{cc}}} = \frac{\underline{\widehat{U_0}}}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{8\exp(90°j)}{4.123\exp(14.04°j)} = 1.94\exp(75.96°j)$

Donc $i_{cc}(t) = 1.94\cos(20000t + 75.96°)$ A

Exercice 7

Quatre charges ponctuelles identiques $-q$ $(q > 0)$ sont fixées aux sommets A, B, C et D d'un carré de côté a. Une cinquième charge $q_0 > 0$ est maintenue fixe au centre du carré.

1) Dessinez l'agencement de charges et les forces du système.



2) Déterminer la valeur de q_0 en fonction de q pour que la force électrostatique totale qui s'exerce sur chacune des cinq charges soit nulle. (*Notez qu'étant donné la symétrie du système vous n'avez qu'à considérer qu'un seul cas !*)

La somme des forces sur une des charges (par exemple en position a) doit être nulle. On obtient que

$$q_0 = q\frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}$$

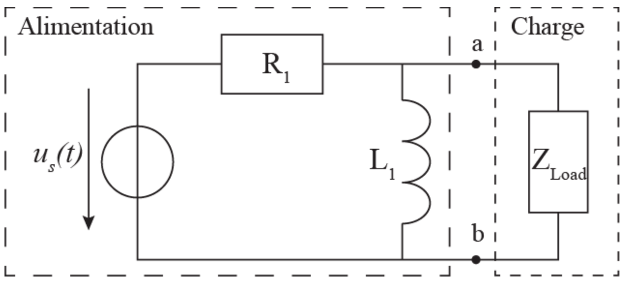
3) Quel est le potentiel au centre du carré ?

Le potentiel est la somme des potentiels dues au 4 charges. On obtient :

$$V = -\frac{1}{\pi\varepsilon}\frac{\sqrt{2}}{a}q$$

Exercice 8

Considérez le circuit ci-dessous composé d'un circuit d'alimentation et d'une charge d'impédance $\underline{Z}_{Load}$. Nous avons $u_s(t) = 10\sqrt{2}\cos(4\cdot 10^6 t)$ V et $\underline{Z}_{Load} = R_{load} + jX_{Load} = 5\cdot 10^3 - j5\cdot 10^3$.



1) Quel est le phaseur efficace $\underline{U}_s$ de la source de tension ?

$\underline{U}_s = 10\,V$.

2) Sachant que la charge n'a que deux éléments, quels sont-ils (résistance, bobine ou condensateur) et quelles sont leurs valeurs (R, C, L ?)

On a la pulsation de 4.10^6 rad/s
La charge a une résistance de 5 kΩ (R) et une réactance négative. C'est donc un condensateur. La valeur est telle que :

$\frac{1}{\omega C} = 5\cdot 10^3$ donc C = 50 pF

3) Exprimer l'impédance interne du circuit d'alimentation vu des bornes a et b sous la forme $\underline{Z_i} = R_i + jX_i$, en fonction de R_1 et de L_1.

Vue des bornes de l'alimentation, l'impédance interne est R_1 en parallèle avec L_1. Donc :

$$Z_i = \frac{j\omega R_1 L_1}{R_1 + j\omega L_1} = \frac{j\omega R_1 L_1 (R_1 - j\omega L_1)}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}$$

$$Z_i = \frac{\omega^2 L_1^2 R_1}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} + j\frac{\omega R_1^2 L_1}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}$$

4) Exprimer le phaseur efficace tension circuit ouvert du circuit d'alimentation, $\underline{U}_0$, en fonction de R_1, L_1 et $\underline{U}_s$.

Nous avons un diviseur de tension, nous prenons la tension sur la bobine :

$$\underline{U}_0 = \frac{j\omega L_1}{R_1 + j\omega L_1}\underline{U}_s$$

5) Redessinez le circuit total avec seulement $\underline{U}_0$, $\underline{Z}_i$ et $\underline{Z}_{Load}$. Puis exprimez la tension $\underline{U}_{Load}$ et le courant $\underline{I}_{Load}$ de la charge en fonction de $\underline{U}_0$, $\underline{Z}_i$ et $\underline{Z}_{Load}$.

Nous avons un circuit à une seule maille comprenant $\underline{U}_0$, $\underline{Z}_i$ et $\underline{Z}_{Load}$en série. La tension aux bornes de la charge est obtenue par le diviseur de tension :

$$\underline{U}_{Load} = \frac{Z_{Load}}{Z_{Load} + Z_i}\underline{U}_o$$

Le courant est donné par la loi d'Ohm :

$$\underline{I}_{Load} = \frac{1}{Z_{Load} + Z_i}\underline{U}_o$$

6) Montrez que la puissance complexe de la charge donnée par $\underline{S}_L = \underline{U}_{Load}\underline{I}_{Load}^*$ est

$$\underline{S}_L = \frac{\left|\underline{U}_0\right|^2}{(R_{Load} + R_i)^2 + (X_{Load} + X_i)^2}(R_{Load} + jX_{Load}) \equiv P + jQ$$

Nous utilisons les expressions précédentes :

$$\underline{S}_L = \frac{Z_{Load}}{Z_{Load} + Z_i}\underline{U}_o \frac{1}{(Z_{Load} + Z_i)^*}\underline{U}_o{}^*$$

$$\underline{S}_L = \frac{\left|\underline{U}_o\right|^2 Z_{Load}}{|Z_{Load} + Z_i|^2}\ avec\ Z_{Load} = R_{Load} + jX_{Load}\ et\ Z_i = R_i + jX_i$$

$$donc\ \underline{S}_L = \frac{\left|\underline{U}_o\right|^2 (R_{Load} + jX_{Load}\ )}{(R_{Load} + R_i\ )^2 + (X_{Load} + X_i\ )^2}$$

7) Le transfert de puissance maximum se fait lorsque la puissance active P est maximisée. Il est facile de prouver que cela est le cas quand $\underline{Z}_{Load} = \underline{Z}_i^*$ Quelles doivent être les valeurs de R_1 et L_1 pour satisfaire le transfert de puissance maximum ?

On a que

$R_i = \frac{\omega^2 L_1^2 R_1}{R_1^2+\omega^2 L_1^2} = R_{Load} = 5 \cdot 10^3$ et $X_i = \frac{\omega R_1^2 L_1}{R_1^2+\omega^2 L_1^2} = X^*{}_{Load} = 5 \cdot 10^3$

Donc :

$$\frac{R_i}{X_i} = \frac{\omega L_1}{R_1} = 1 \Longrightarrow R_1 = \omega L_1$$

On peut substituer dans une des expressions : $R_i = \frac{\omega^3 L_1^3}{2\omega^2 L_1^2} = 5 \cdot 10^3 \Longrightarrow \omega L_1 = 10 \cdot 10^3$

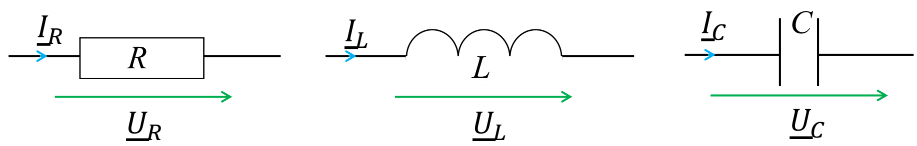
Et $L_1 = 2.5\ mF$

Pour finir on a $R_1 = \omega L_1 = 10\ k\Omega$

8) Exprimez la puissance active P de la charge dans le cas de transfert maximum.

$P = \frac{|\underline{U_o}|^2 (R_{Load})}{(R_{Load}+R_i)^2+(X_{Load}+X_i)^2} = \frac{|\underline{U_o}|^2}{4R_{Load}}$ pour $\underline{Z}_{Load} = \underline{Z}_i^*$

Exercice 9



1) Rappeler la relation entre puissance complexe, courant efficace et impédance. Même question mais avec tension efficace.

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = (\underline{Z}\,\underline{I})\underline{I}^* = \underline{Z}I^2$$

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = \underline{U}\left(\frac{\underline{U}^*}{\underline{Z}^*}\right) = \frac{U^2}{\underline{Z}^*}$$

2) Pour les trois cas ci-dessus, exprimer la puissance complexe, la puissance active et la puissance réactive en fonction du courant efficace puis de la tension efficace.

Pour $\underline{Z} = R$:

$$\underline{S} = RI^2 = \frac{U^2}{R};$$

$$P = RI^2 = \frac{U^2}{R};$$

$$Q = 0$$

Pour $\underline{Z} = j\omega L$:

$$\underline{S} = j\omega LI^2 = j\frac{U^2}{\omega L};$$

$$P = 0;$$

$$Q = \omega LI^2 = \frac{U^2}{\omega L}$$

Pour $\underline{Z} = -\frac{j}{\omega C}$:

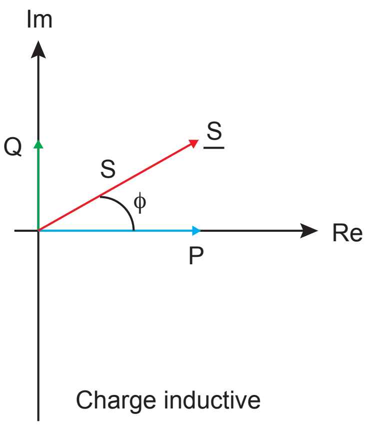
$$\underline{S} = -j\frac{1}{\omega C}I^2 = -j\omega CU^2;$$

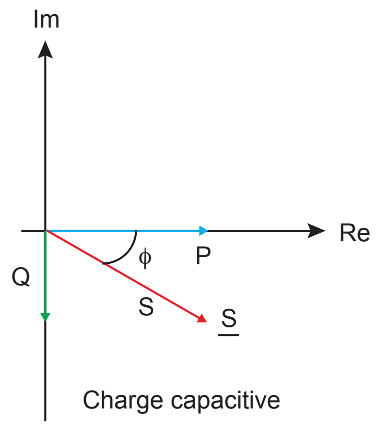
$$P = 0;$$

$$Q = -\frac{I^2}{\omega C} = -\omega CU^2;$$

Exercice 10

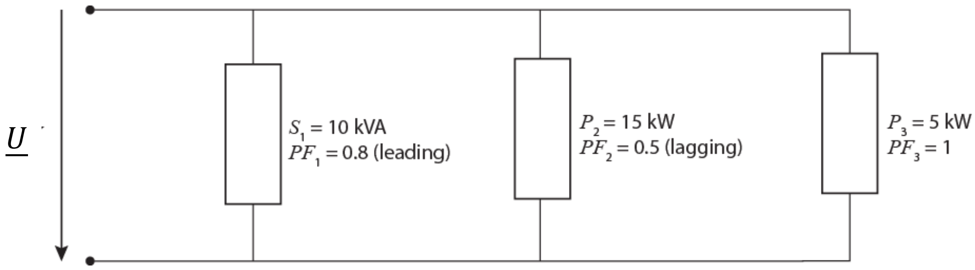
1) Dans les plans complexes suivants, illustrer les puissances actives, réactives et apparentes pour une charge inductive et une charge capacitive. Indiquer le déphasage. Une charge inductive induit-elle un FP en retard ou en avance ?





Une charge inductive produit un FP en retard (lagging)

Considérer le circuit ci-dessous avec |U|= 440 V.



3) Pour chacune des trois charges, calculer le déphasage ϕ. Faire attention au signe.

Charge 1 : $FP = 0.8\ leading$ donc $\phi = -\cos^{-1}(0.8) - 36.87°$

Charge 2 : $FP = 0.5\ lagging$ donc $\phi = \cos^{-1}(0.5) = 60°$

Charge 3 : $FP = 1$ donc $\phi = 0°$

4) Calculer les puissances complexes $\underline{S}_1, \underline{S}_2, et\ \underline{S}_3$ de chaque charge (rappel $\underline{S} = P + jQ = S\exp(j\phi)$) et exprimer les sous forme algébrique.

Charge 1 : $S = 10k\ et\ \phi = -36.87°$ donc $\underline{S} = Scos\phi + jSsin\phi = 8000 - 6000j$ VA

Charge 2 : $P = 15k\ et\ \phi = 60°$ donc $S = \frac{P}{cos\phi} = 30K$ et $\underline{S} = Scos\phi + jSsin\phi = 15000 + 25980j$ VA

Charge 3 : $\underline{S} = P = 5000$ VA

5) La puissance complexe totale du circuit est la somme des trois puissances. Quelle est la puissance complexe totale $\underline{S}_{tot}$?

$\underline{S}_{tot} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 = 8000 - 6000j + 15000 - 25980j + 5000 = 28000 + 19980j$ VA.

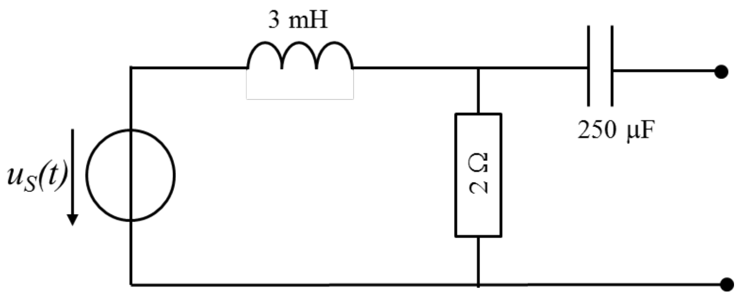
5) Le circuit ci-dessous est équivalent à un circuit à une seule charge de puissance complexe $\underline{S}_{tot}$. Montrer que le FP de cette charge équivalente est de 0.81 (en retard, *lagging*).

On écrit $\underline{S}_{tot}$ sous la forme polaire : $\underline{S}_{tot} = 34397.68\exp(35.51j) = Sexp(\phi)$.

On a donc par définition : $FP = cos\phi = 0.81$.

Exercice 11

Le circuit suivant alimente une charge. Nous voulons savoir quelle serait la valeur de la tension aux bornes de cette charge. Nous avons $u_s(t) = 2\cos(300t + 10°)$ V.



1) Quel est le phaseur crête de la source de tension $\underline{\hat{U}}$? Quelle sont les impédances $\underline{Z_L}$, $\underline{Z_C}$, $\underline{Z_R}$ des trois éléments du circuit (valeur numérique)?

$$\underline{\hat{U}} = 2\exp(10°j)$$

$$\underline{Z_L} = j\omega L = 9j\ \Omega$$

$$\underline{Z_c} = -\frac{j}{\omega C} = -\frac{40j}{3}\ \Omega$$

$$\underline{Z_R} = 2\ \Omega$$

2) Nous allons remplacer le circuit par son équivalent de Thévenin. Calculer l'impédance interne sous forme algébrique et exponentielle.

$$\underline{Z_{th}} = \frac{\underline{Z_L}\underline{Z_R}}{\underline{Z_L} + \underline{Z_R}} + \underline{Z_c} = \frac{18j}{2+9j} - \frac{40j}{3} = \frac{360-32j}{3(2+9j)}$$

$$\underline{Z_{th}} = \frac{\sqrt{360^2+32^2}\exp(-5.08°j)}{3\sqrt{4+81}\exp(77.47°j)}$$

$$\underline{Z_{th}} = 13.07\exp(-89.2°j)$$

$$\underline{Z_{th}} = 13.07\cos(-89.2°) + 13.07j\sin(-89.2°) = 0.18 - 13.07j$$

3) Calculer le phaseur crête de la tension circuit ouvert et dessiner l'équivalent de Thévenin.

Pas de courant dans le condensateur donc c'est la tension aux bornes de la résistance. Par un diviseur de tension :

$$\underline{\hat{U}_0} = \frac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_L}}\underline{\hat{U}} = \frac{2}{2+9j}2\exp(10°j) = \left[\frac{2}{9.22}\exp(-77.5°j)\right][2\exp(10°j)]$$

$$\underline{\hat{U}_0} = \frac{4}{9.22}\exp(-67.5°j)$$

$$\underline{\hat{U}_0} = 0.43\exp(-67.5°j)$$